

Θέμα 1 (1M) Να αποδείξετε ότι αν ένα αντικείμενο βρίσκεται σε κατάσταση μεταφορικής ισορροπίας και αν η ολική ροπή ως προς κάποιο σημείο είναι μηδενική, τότε η ροπή του σώματος είναι μηδενική ως προς οποιοδήποτε σημείο. Να κάνετε σχήμα στο οποίο να δείχνετε τα μεγέθη που θα χρησιμοποιήσετε στην απόδειξη.

(Η απόδειξη βρίσκεται στο διδακτικό βιβλίο)

Θέμα 2 (1M) Σε ένα τρισσορθόγωνιο σύστημα αξόνων x, y, z , με μοναδιαία διανύσματα στους άξονες $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ αντίστοιχα, μια δύναμη: $\mathbf{F} = (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$ N, δρα σε ένα σώματιο που υφίσταται μετατόπιση $\mathbf{s} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j})$ m . Να υπολογίσετε:

- το έργο που παράγει η δύναμη στο σώματιο και
- τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{s}$

Από τον ορισμό του έργου σταθερής δύναμης έχουμε

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 18 - 2 + 0 = 16J$$

Για τον υπολογισμό της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων δύναμης-μετατόπισης εφαρμόζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Έχουμε

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\theta_{F,s}) \Rightarrow$$

$$\cos(\theta_{F,s}) = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{F}| |\mathbf{s}|} = \frac{18J}{\sqrt{40}\sqrt{10}J} = \frac{18}{20} = 0.9 \Rightarrow$$

$$\theta_{F,s} = \cos^{-1}(0.9) \approx 0.451 \text{ rad} = \left(\frac{0.451 \times 180}{\pi} \right)^\circ = 25.84^\circ$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε $|\mathbf{F}| = \sqrt{6^2 + 2^2} \text{ N} = \sqrt{40} \text{ N}$ και $|\mathbf{s}| = \sqrt{3^2 + 1^2} \text{ m} = \sqrt{10} \text{ m}$.

Θέμα 3 (1M) Το μόριο του Οξυγόνου (O_2) (Ατομικό Βάρος: 16) περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z , που είναι κάθετος στο επίπεδο xy και διέρχεται από το μέσο της γραμμής που ενώνει τα δύο άτομα. Σε θερμοκρασία δωματίου, η μέση απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων είναι $1,21 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (θεωρούμε ότι τα άτομα είναι σημεία στο χώρο). Να υπολογίσετε:

- τη ροπή αδράνειας του μορίου ως προς τον άξονα z
- την κινητική ενέργεια περιστροφής, αν γνωρίζετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του μορίου γύρω από τον άξονα z είναι $2,0 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$ (Υπόδειξη: Σε μάζα ίση με το AB ενός συστατικού σε γραμμάριο περιέχονται $N = 6.022 \times 10^{23}$ σωματίδια του συστατικού.)

α) Η μάζα ενός ατόμου οξυγόνου είναι, $m_o = \frac{16g}{6.022 \times 10^{23}} \approx 2.66 \times 10^{-23} \text{ g} = 2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}$

Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε,

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = \left(m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 + m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 \right) \\ = 2.66 \times 10^{-26} \times 3.66 \times 10^{-21} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 = 9.33 \times 10^{-47} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

β) $K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 9.33 \times 10^{-47} (2 \times 10^{12})^2 \text{ J} \approx 1.95 \times 10^{-22} \text{ J}$

Θέμα 4 (2Μ) Ένα ελατήριο με αμελητέα μάζα έχει σταθερά $k = 1600 \text{ Nm}^{-1}$.

α) Πόσο θα πρέπει να συμπιεστεί από το φυσικό του μήκος ώστε η αποθηκευμένη δυναμική του ενέργεια να είναι 3.20 J ;

β) Πόσο θα πρέπει να εκταθεί ώστε να έχει την ίδια δυναμική ενέργεια;

γ) Τοποθετούμε το ελατήριο με το ένα άκρο του στερεωμένο κάθετα στο επίπεδο. Υπολογίστε τη μέγιστο μήκος συμπίεσης όταν στο ελεύθερο άκρο του πέσει μάζα 1.20 Kgr από ύψος 0.80 m πάνω από το ελεύθερο άκρο του.

Α) Έχουμε $U_{el} = \frac{1}{2}k(\delta x)^2$ όπου δx η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου. Θέλουμε

$$U_{el} = 3.20 \text{ J} \Rightarrow \frac{1}{2}k(\delta x)^2 = 3.20 \text{ J} \Rightarrow \delta x = \pm \sqrt{\frac{2 \times 3.20 \text{ J}}{1600 \text{ Nm}^{-1}}} \approx \pm 0.063 \text{ m}$$

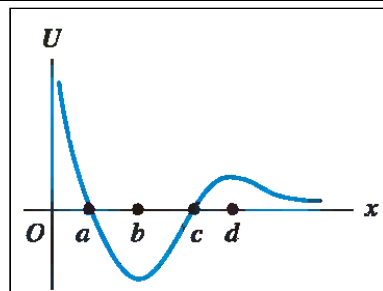
Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την συμπίεση του ελατηρίου η αποδεκτή λύση είναι $\delta x \approx -0.063 \text{ m}$

Β) Προφανώς για την έκταση έχουμε $\delta x \approx 0.063 \text{ m}$.

Γ) Θεωρώντας ότι το οριζόντιο επίπεδο στο ύψος του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου ως το επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας η δυναμική ενέργεια της μάζας πριν την ελεύθερη πτώση είναι $U_0 = mgh = 1.20 \times 10 \times 0.80 \text{ J} = 9.6 \text{ J}$. Όλη αυτή η ενέργεια κατά την πτώση του σώματος μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και μετά την επαφή με το ελατήριο σε ελαστική ενέργεια του ελατηρίου και κινητική ενέργεια της μάζας. Όταν η ταχύτητα του σώματος μηδενιστεί όλη η ενέργεια είναι ελαστική και το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συμπίεση. Έχουμε

δηλ. $U_{el} = 9.60 \text{ J} \Rightarrow \frac{1}{2}k(\delta x)^2 = 9.60 \text{ J} \Rightarrow \delta x \approx -0.11 \text{ m}$. Δηλαδή η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι 11 cm .

Θέμα 5 (1Μ) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του x -άξονα. Σε ποια από τα σημεία που επισημαίνονται στον άξονα x η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι α) μηδενική, β) προς τη θετική διεύθυνση, και γ) προς την αρνητική διεύθυνση. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Γνωρίζουμε ότι $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Συνεπώς α) η δύναμη είναι μηδενική

εκεί που η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει ακρότατα. Δηλ. στα σημεία b και d του διαγράμματος.

β) η παράγωγος (κλίση) της δυναμικής ενέργειας είναι αρνητική για $0 < x < b$ και για $x > d$ και θετική όταν $b < x < d$. Συνεπώς από τη σχέση $F_x = -dU/dx$ προκύπτει ότι $F_x < 0$ όταν $b < x < d$ δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι στη διεύθυνση της αρχής των αξόνων και $F_x > 0$ όταν $0 < x < b$ ή $x > d$

Θέμα 6 (1.5Μ) α) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας 2 kg σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $\mathbf{r} = (6\mathbf{i} + 5t\mathbf{j})$ m. Προσδιορίστε τη στροφορμή $\mathbf{L}$ του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Η ορμή του σωματιδίου

είναι $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (10\mathbf{j}) \text{ kg m s}^{-1}$. Έχουμε

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5t & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -(10\mathbf{k}) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}. \text{ Για τη συγκεκριμένη κίνηση η στροφορμή δεν εξαρτάται}$$

από το χρόνο, έχει σταθερό μέτρο και διεύθυνση κατά τα αρνητικά του άξονα z.

Θέμα 7 (2.0Μ) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1=950\text{kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = ((3-t)\mathbf{i} + 9t\mathbf{j})$ m και ενός άλλου μάζας $m_2=450 \text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = (2t\mathbf{i} + 9t^2\mathbf{j})$ m. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$. Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο θα συγκρουστούν. Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα.

Τα σώματα συγκρούονται όταν οι θέσεις τους ταυτίζονται, δηλ. πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \Rightarrow \begin{cases} 3-t=2t \\ 9t=9t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=1 \text{ ή } t=0 \end{cases} \Rightarrow t=1\text{s}$$

Η χρονική εξέλιξη των ταχυτήτων των σωματιδίων όπως υπολογίζονται από τη σχέση $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ είναι: $\mathbf{v}_1 = (-\mathbf{i} + 9\mathbf{j})\text{m/s}$ και $\mathbf{v}_2 = (2\mathbf{i} + 18t\mathbf{j})\text{m/s}$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωματιδίων έχουμε $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$.

Εφαρμόζοντας για $t=1\text{s}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 &= (m_1 + m_2)\mathbf{v}_f \Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{v}_2 \\ \Rightarrow \mathbf{v}_f &= \frac{950}{1400}(-\mathbf{i} + 9\mathbf{j})\text{m/s} + \frac{450}{1400}(2\mathbf{i} + 18\mathbf{j})\text{m/s} = \left(-\frac{5}{140}\mathbf{i} + 9\frac{185}{140}\mathbf{j}\right)\text{m/s} \end{aligned}$$

Θέμα 8 (1Μ) Μια πλαστική σφαίρα επιπλέει στο νερό με το 50% του όγκου της βυθισμένο. Η ίδια σφαίρα σε γλυκερίνη επιπλέει με το 40% του όγκου της βυθισμένο. Υπολογίστε τις πυκνότητες του πλαστικού και της γλυκερίνης. ($\rho_{\text{νερού}}=1\text{gr/cm}^3$).

Έστω V_s ο όγκος m_s η μάζα και $\rho_s = m_s/V_s$ η πυκνότητα της πλαστικής σφαίρας.

Και στις δύο περιπτώσεις το σώμα επιπλέει όποτε το βάρος του εξισορροπείται από τη δύναμη της άνωσης.

Φυσική Ι

Τμ. Επιστήμης των Υλικών, Εξεταστική Φεβρουαρίου, (3- Φεβ. 2010)

Για το πείραμα στο νερό: $m_s g = \underbrace{0.5 V_s \rho_{H_2O}}_{m_{H_2O}} g$

Για το πείραμα στη γλυκερίνη: $m_s g = \underbrace{0.4 V_s \rho_{gl}}_{m_{gl}} g$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $m_s g = 0.5 V_s \rho_{H_2O} g \Rightarrow \frac{m_s}{V_s} = 0.5 \rho_{H_2O} \Rightarrow \rho_s = 0.5 \rho_{H_2O}$

Από τη δεύτερη σχέση: $m_s g = 0.4 V_s \rho_{gl} g \Rightarrow \rho_{gl} = \frac{m_s}{0.4 V_s} = 2.5 \rho_s = 2.5 \times 0.5 \rho_{H_2O} = 1.25 \rho_{H_2O}$

Διάρκεια 2,5 ώρες

-- Καλή Επιτυχία --